Nom en lettres MAJUSCULES	Prénom en lettres MAJUSCULES	Numéro d'identificati

Introduction à l'algèbre linéaire (MAT-1200)
Examen partiel 2 du 24 avril 2023

Durée 2h50.

- Inscrivez votre nom, prénom en MAJUSCULE et le numéro d'identification aux endroits indiqués ci dessus.
- Veuillez éteindre vos téléphones. Déposez vos téléphones et vos montres intelligentes dans vos sacs.
- **Ce sujet comporte 6 questions sur 11 pages + deux feuilles de brouillon.**
- **Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées**
- Pour répondre aux questions, utilisez le recto des pages 2 à 11. Si vous manquez de place, utilisez le verso.
- Les deux dernières feuilles sont pour faire un brouillon. Vous les détachez du cahier de l'examen. Inscrivez votre nom sur chacune des feuilles. **Il faut les rendre à la fin de l'examen.**
- Documents admis : deux feuilles manuscrites 8 1/2 $\times$ 11, recto-verso.
- Seulement les calculatrices autorisées.
- Aucune sortie n'est autorisée pendant l'examen.

Question 1	:	/20
Question 2	:	/14
Question 3	:	/20
Question 4	:	/20
Question 5	:	/14
Question 6	:	/12

TOTAL : /100

Question 1. (4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 points)

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des questions suivantes. Justifier chacune de vos réponses.

a) On considère l'application linéaire

$$T : (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + 2y, 0, x + 4y, x)^t \in \mathbb{R}^4.$$

Est-ce que la dimension du noyau de T est égale à 1 ?

b) Soit A une matrice orthogonale d'ordre $n \geq 2$. Est-ce que le déterminant de A est égal à 1 ?

c) On considère la matrice carrée d'ordre 100 telle que $M = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = (3i \times j)^{10}$. Est-ce que la matrice M est diagonalisable ?

d) A est une matrice carrée d'orde 4 ayant les valeurs propres $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 0$ et $\alpha_4 = 5$. Est-ce que A est non inversible ?

e) E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base orthogonale de E. Soit $\vec{w}$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$ tel que sa projection sur E est le vecteur $3\vec{w}$. Est-ce que $\vec{w}$ appartient à E ?

Question 2. (3 + 4 + 4 + 3 = 14 points)

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le déterminant de B.

b) Compléter la matrice suivante pour qu'elle soit égale à la matrice des cofacteurs de la matrice B.

$$\mathrm{Com}(B) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ 3 & 1 & -2 \\ \cdots & \cdots & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Quelle est la matrice $\mathrm{adj}(B)$ adjointe de B ? En déduire la matrice B^{-1}.

d) On suppose qu'il existe une matrice C orthogonale et une matrice M toutes les deux carrées d'ordre 3 telles que $C^t(2M)C = B$. Calculer le déterminant de la matrice M.

(Suite de la solution de la question 2)

Question 3. (3 + 4 + 4 + 3 + 6 = 20 points)

Soient $\vec{u}_1 = (1,2,1)^t$ et $\vec{u}_2 = (2,1,-4)^t$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit la transformation T de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ par

$$T(\vec{v}) = -3\mathrm{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + 21\mathrm{proj}_{\vec{u}_2}(\vec{v}) \text{ où } \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Est ce que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ forme un ensemble orthogonal ? Est-il une base de $\mathbb{R}^3$?
b) Calculer $T(\vec{u_1})$ et $T(\vec{u_2})$ en fonction de $\vec{u_1}$ et de $\vec{u_2}$.
c) On considère le vecteur $\vec{u}_3 = (1,1,1)^t$. Calculer, en degré, l'angle entre les vecteurs $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_1$.
d) Calculer $T(\vec{u}_3)$ en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
e) L'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice M de T dans la base $\mathcal{B}$ (on pourra utiliser b) et d)).

(Suite de la solution de la question 3)

Question 4. (2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 7 = 20 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{u}_1 = (1, -2, 1)^t$ est un vecteur propre de la matrice A et déterminer la valeur propre α_1 associée au vecteur $\vec{u}_1$.

b) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)^t$ est un vecteur propre de la matrice A et déterminer la valeur propre α_2 associée au vecteur $\vec{u}_2$.

c) Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre α_1.

d) Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre α_2.

e) Quelle est la troisième valeur propre α_3 de A ?

f) Utiliser ce qui précède pour déterminez des matrice P et D telles que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale. **Ne pas calculer la matrice P^{-1}.**

(Suite de la solution de la question 4)

Question 5. (3 + 6 + 5 = 14 points)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique, notée $\mathcal{C}$. On considère la transformation linéaire définie par

$$\begin{array}{rccl} T \ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{u} = (x, y, z)^t & \longmapsto & (y - z, x + 2z, x + 2y)^t \,. \end{array}$$

i) Donnez la matrice M de T si les espaces de départ et d'arrivée sont munis de la base canonique.
ii) Déterminer une base du noyau de T. Quelle est sa dimension ?
iii) Quelle est la dimension de l'image de T ? Déterminer une base de l'image de T.

(Suite de la solution de la question 5)

Question 6. (2 + 3 + 3 + 4 = 12 points)

On considère dans $\mathbb{R}^2$ la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1)^t, \vec{u}_2 = (-1,1)^t\}$ et $\mathcal{C} = \left\{\vec{i} = (1,0)^t, \vec{j} = (0,1)^t\right\}$ sa base canonique.

a) Déterminez la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

b) Déterminez la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

c) Déterminer dans la base $\mathcal{B}$ les coordonnées c et d en fonction de a et b du point M tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = c\vec{u}_1 + d\vec{u}_2$.

d) On considère la droite D d'équation $y = 2x$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique. Déterminer l'équation de la droite D lorsque l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la base $\mathcal{B}$.

(Suite de la solution de la question 6)

Feuille pour brouillon

Nom : ______________________________ **No d'identification** : ________________________

Prénom : ______________________________

Feuille pour brouillon

Nom : ______________________________ **No d'identification** : ________________________

Prénom : ______________________________